

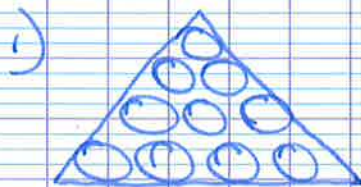
Langouirien
Anélie
13

Olympiades Épreuve en groupe

Ed
Victor
1A

Exercice 1

PARTIE A



$$1+2+3+4 = 10$$

ainsi $T_4 = 10$

2) $T_5 = 1+2+3+4+5 = 15$

3) $T_6 = 1+2+3+4+5+6 = 21$
 $0.15 < 20 < 21$ donc 20 ne peut pas être un nombre triangulaire.

4) Pour inscrire l'empilement dans un triangle équilatéral, il faut qu'il y ait autant de balles sur les trois côtés. Donc chaque niveau sera composé d'un élément de plus que le niveau d'en dessous, ~~le n~~ correspond alors au nombre de niveaux et au nombre d'éléments dans le dernier niveau. Puisque T_n est égal à la somme des nombres d'éléments dans l'empilement, T_n est égal à la somme des entiers de 1 à n.

5) Si on prend une pastille qui fait correspond

à un carreau

6) Si on a un rectangle de côté $n+1$ et n
~~et rectangle~~ l'aire de ce rectangle est $n(n+1)$,
d'après la question 5 on a $2T_n = n(n+1)$
car chaque pastille correspond à une unité d'aire.
Ainsi, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ or T_n est égal à la somme
des entiers de 1 à n .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\begin{aligned} 7) \quad T_n + T_{n+1} &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + n^2 + 2n + n + 2}{2} \\ &= \frac{2n^2 + 4n + 2}{2} \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Donc la somme de deux nombres triangulaires consécutifs est un carré parfait.

$$\begin{aligned} 8) \quad 8T_n + 1 &= 4 \times 2T_n + 1 \\ &= 4 \times n(n+1) + 1 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 \\ &= (2n+1)^2 \end{aligned}$$

PARTIE B

$$1) \text{ Soit } n=6 \text{ et } p=2$$

$$1+2+3+\dots+(n-1) = 1+2+3+4+5$$

$$\boxed{= 15}$$

$$\text{et } (n+1) + (n+p) = 6+1 + 6+2$$

$$\boxed{= 15}$$

$$1+2+3+4+\dots+(n-1) = (n+1) + (n+p)$$

Pour 6 est bien un nombre pivot d'équilibre de poids 2.

$$2) (n+1) + (n+2) + \dots + (n+p)$$

$$= \underbrace{n + \dots + n}_{p \text{ fois}} + 1+2+\dots+p$$

$$= np + \frac{p(p+1)}{2}$$

sachant que la somme des entiers naturels de 1 à p est égal à $\frac{p(p+1)}{2}$

$$3) 1+2+\dots+(n-2)+(n-1) = (n+1) + (n+2) + \dots + (n+p)$$

$$1+2+\dots+(n-2)+(n-1) = np + \frac{p(p+1)}{2}$$

$$\frac{(n-1)n}{2} = np + \frac{p(p+1)}{2}$$

$$(n-1)n = 2np + p(p+1)$$

$$0 = 2np + p^2 + p - n^2 + n$$

$$\boxed{0 = p^2 + p(2n+1) - (n^2 - n)}$$

$$4) p^2 + (2n+1)p - (n^2 - n) = 0$$

Nous avons un polynôme du second degré, donc si p existe alors

$$p = \frac{-(2n+1) \pm \sqrt{(2n+1)^2 - 4(-n^2+n)}}{2}$$

$$p = \frac{-2n-1 \pm \sqrt{4n^2+1}}{2}$$

$$5) p^2 + (2 \times 35 + 1)p - (35^2 - 35) = 0$$

$$p^2 + 71p - 1190 = 0$$

$$p_1 = \frac{-71 + \sqrt{71^2 + 4 \times 1190}}{2} = \frac{-71 + 99}{2} = 14$$

$$p_2 = \frac{-71 - 99}{2} = -85$$

Or p est un entier naturel donc p ne peut pas être négatif

Alors $p = 14$

Languevin

Anélie

IB

Eck

Victor

IA

Olympiades épreuve en groupe

Exercice 2

PARTIE A

1) a. On sait que $\triangle ACB$ est un triangle équilatéral

$$\text{Donc } \hat{CAB} = 60^\circ$$

On sait que $\triangle AFE$ est un triangle isocèle ^{en A}, alors

$$\hat{AEF} = \hat{EFA} \quad \text{or, } \hat{EAF} = \hat{CAB} = 60^\circ \text{ et}$$

$$180 - 60 = 120 \quad \frac{120}{2} = 60$$

$$\text{Donc } \hat{AEF} = 60^\circ$$

On sait que la médiatrice (ED) coupe \hat{CAB} en sa bissectrice

$$\text{Donc } \hat{EAG} = \frac{60}{2} = 30^\circ$$

$$\text{Alors, } \hat{EGA} = 180 - \hat{EAG} - \hat{AEG}$$

$$= 180 - 30 - 60$$

$$\boxed{\hat{EGA} = 90^\circ}$$

On sait que la symétrie conserve les longueurs et les angles donc, $\boxed{\hat{EGA} = \hat{CEI} = 90^\circ}$

b. On sait que la symétrie conserve les longueurs et les angles donc par une première symétrie, le triangle FHA est semblable au triangle MLK qui lui est, par une seconde symétrie MLK est semblable à MNC .

Donc, les triangles FHA et MNC sont semblables.

c. $BDGF$ et $CDLM$ ont les mêmes longueurs et les mêmes angles, ils sont donc égaux

2) On sait que $\widehat{CJE} = 90^\circ$ $\widehat{CJE} = \widehat{NKG} = 90^\circ$
 Les triangles FHA et MCK ont les mêmes angles par symétrie et les triangles MCK et MNC ont aussi les mêmes angles par symétrie. donc

$$\begin{aligned}\widehat{MNC} &= \widehat{FGA} \\ &= 180 - \widehat{ACI} \\ &= 180 - 90\end{aligned}$$

$$\widehat{MNC} = 90^\circ \quad \widehat{MNC} = \widehat{LNG} = 90^\circ$$

$$\begin{aligned}\text{Enfin, } \widehat{MNC} &= \widehat{MLK} \quad \text{et } \widehat{NLG} = 180 - \widehat{MLK} \\ &= 180 - \widehat{MNC} \\ &= 180 - 90\end{aligned}$$

$$\widehat{NLG} = 90$$

Nous avons un quadrilatère avec trois angles $\widehat{NLG} = \widehat{LNG} = \widehat{NKG} = 90^\circ$ donc le quadrilatère $JGLN$ est un rectangle.

$$3) a. \mathcal{A}_{ABC} = \frac{DA \times CB}{2} = \frac{1 \times 1}{2}$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$b. \mathcal{A}_{JGLN} = (JC + CN)(JD)$$

Par symétrie: $JC = CN = AG$ et $JD = CD = 0,5$

Or selon le théorème de Thalès

$$\frac{AG}{AD} = \frac{AF}{AB} = \frac{0,5}{1}$$

$$AG = 0,5$$

$$\text{alors } \mathcal{A}_{JGLN} = (0,5 + 0,5) 0,5$$

$$\mathcal{A}_{JGLN} = 0,5$$

Nous concluons que l'aire du rectangle JH LN est la même que le triangle ABC

PARTIE C

$$4) a. l^2 = 0,25^2 + x^2 - 2 \times 0,5 \times x \times \cos(60)$$

$$\Leftrightarrow l^2 = 0,25 + x^2 - x \cos(60)$$

$$\Leftrightarrow l^2 = 0,25 + x^2 - \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{l = \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} + 0,25}}$$

$$b. l^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos(90)$$

$$\Leftrightarrow l^2 = u^2 + v^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{l = \sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$u^2 + v^2 = x^2 - \frac{x}{2} + 0,25$$

Partie B

1) Pour $\alpha = 0$, A et F sont confondus, l'ensemble de la figure correspond à la figure initiale figure 1.a

2) Voir annexe.

3) Sachant que (EH) et (FD) se coupent perpendiculairement en H, $\widehat{JHM} = 90^\circ$.

Par symétrie, $\widehat{DML} = \widehat{DIG} = 90^\circ$ et $\widehat{KJE} = \widehat{EHF} = 90^\circ$.

Or \widehat{DML} correspond à \widehat{HMN} et \widehat{KJE} correspond à \widehat{NJH} .

Donc JHMN est un rectangle.

Annexe pour l'exercice académique 2 (découpage de Dudeney)

